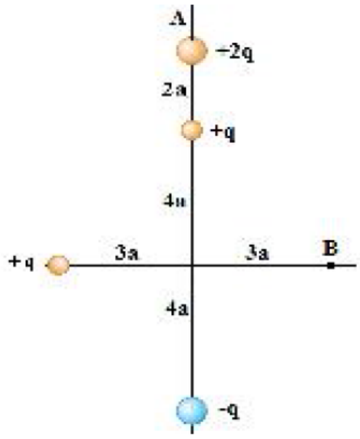
2014/2 MÜHENDİSLİK BÖLÜMLERİ FİZİK 2

UYGULAMA 3

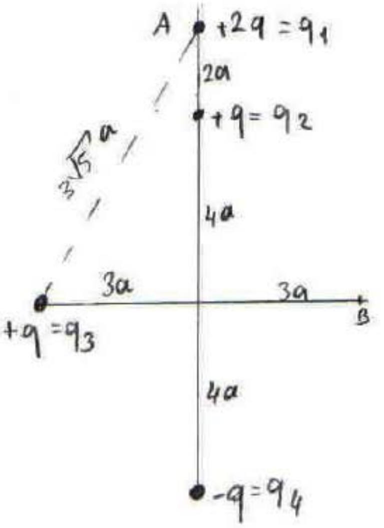
(Elektriksel Potansiyel)

1. a) Şekil 1'deki +2q yükünü **A(0,6a)** noktasından **B(3a,0)** noktasına getirebilmek için gerekli olan elektriksel işi bulunuz.

b) Yeni sistemin toplam potansiyel enerjisini bulunuz.



Şekil 1



(a) +2q yükünü A(0,6a)'dan. B(3a,0)'ye götürmek için yapılan işi;

$$U_{12} = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

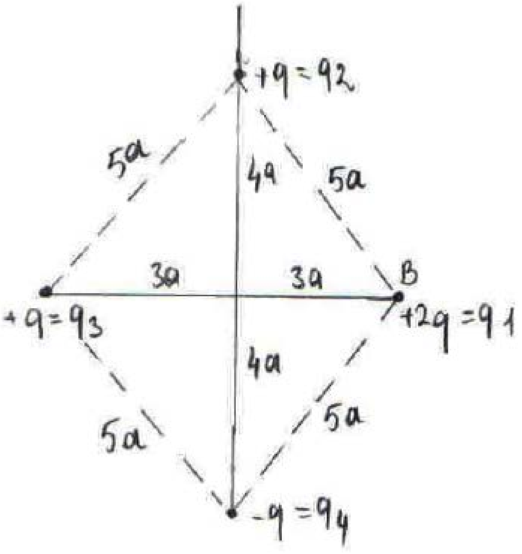
$$U_A = \underbrace{k\,\frac{2q(q)}{2a}}_{U_{21}} + \underbrace{k\,\frac{q(2q)}{3\sqrt{5}\,a}}_{U_{31}} + \underbrace{k\,\frac{(-q)(2q)}{10a}}_{U_{41}}$$

$$U_A = U_{21} + U_{31} + U_{41}$$

$$= k\,\frac{q^2}{a} + k\,\frac{2q^2}{3\sqrt{5}\,a} - k\,\frac{q^2}{5a}$$

$$= k\,\frac{q^2}{a}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$$

+2q yükü B noktasında iken;



$$U_B = \underbrace{k\,\frac{2q(q)}{5a}}_{U_{21}} + \underbrace{k\,\frac{(2q)q}{6a}}_{U_{31}} + \underbrace{\frac{k(-q)(2q)}{5a}}_{U_{41}}$$

$$U_B = \frac{2kq^2}{5a} + k\,\frac{q^2}{3a} - \frac{2kq^2}{5a}$$

$$U_B = \frac{kq^2}{3a}$$

$$U_B - U_A = \frac{kq^2}{a}\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$W_{A\to B} = U_B - U_A = k\,\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}} - \frac{7}{15}\right)$$

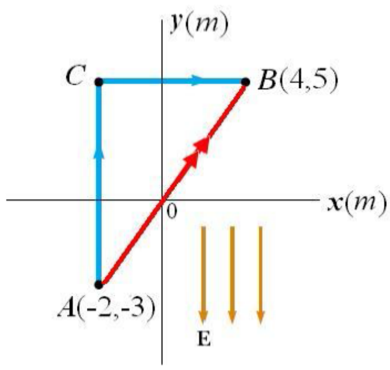
b) Yeni sistemin toplam potansiyel enerjisi;

$$U_{son} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_{son} = \frac{k(2q)(q)}{5a} + \frac{k(2q)(q)}{6a} + k\,\frac{(-q)(2q)}{5a} + \frac{k(q)(q)}{5a} + k\,\frac{(q)(-q)}{8a} + k\,\frac{(q)(-q)}{5a}$$

$$\boxed{U_{son} = \frac{5}{24}\,k\,\frac{q^2}{a}}$$

2. **325 (V/m)** şiddetindeki düzgün bir elektrik alan **–y** ekseni doğrultusunda uygulanmaktadır. Şekil 2'deki **A** ve **B** noktalarının koordinatları sırasıyla **(-2,-3) m** ve **(4,5) m**'dir. **(V_B-V_A)** potansiyel farkını, doğrusal olarak verilen **ACB** ve **AB** yolları üzerinden hesaplayınız.

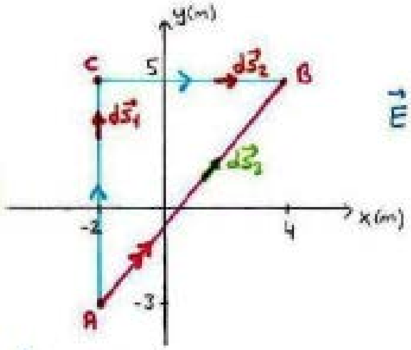


Şekil 2

$d\vec{s}_1 = dy\,\hat{j}$

$d\vec{s}_2 = dx\,\hat{i}$

$d\vec{s}_3 = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$



$\vec{E} = -325\,\hat{j}$ (V/m)

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

ACB yolu için:

$$V_B - V_A = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{s}_1 - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{s}_2$$

$$V_B - V_A = -\int_A^C (-325\,\hat{j})\cdot dy\,\hat{j} - \int_C^B (-325\,\hat{j})\cdot dx\,\hat{i} \qquad (\hat{j}\cdot\hat{i} = 0)$$

$$V_B - V_A = 325 \int_A^C dy$$

$$V_B - V_A = 325 \int_{-3}^{5} dy = 325 \Big[y \Big]_{-3}^{5} = 325\,[5-(-3)]$$

$$\boxed{V_B - V_A = 2600\ (V)}$$

AB yolu için:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

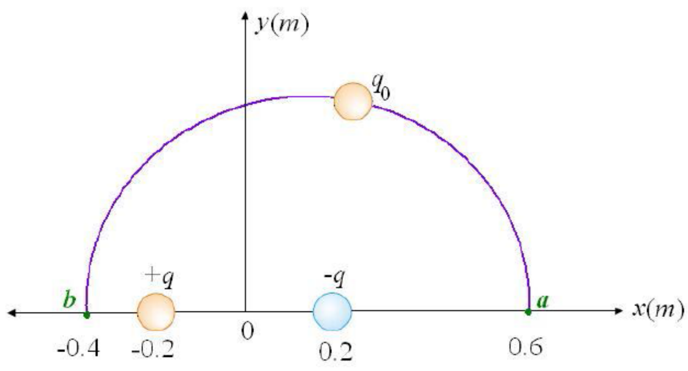
$$V_B - V_A = -\int_A^B (-325\,\hat{j}) \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j})$$

$$V_B - V_A = 325 \int_A^B dy$$

$$V_B - V_A = 325 \int_{-3}^{5} dy = 325 \left[y \right]_{-3}^{5}$$

$$\boxed{V_B - V_A = 2600 (V)}$$

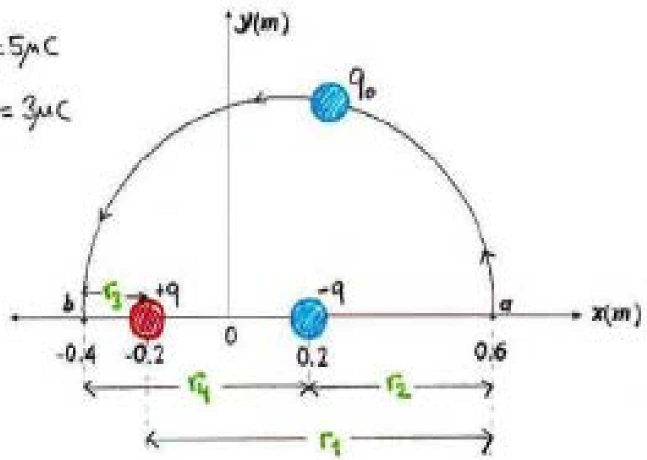
3. Bir elektrik dipolü Şekil 3'deki gibi **x= −0,2 m**'deki **+5 μC** yükü ile **x= 0,2 m**'deki **−5 μC** yükünden oluşmaktadır. **q_o=3 μC**'lik bir deneme yükü, **x=0,6 m** olan noktadan **x= −0,4 m** olan noktaya, yarıçapı **0,5 m** olan ve **y**-eksenini kesen yarım çember şeklindeki yolu izleyerek sabit hızla taşınmıştır. Deneme yükünü hareket ettirmek için ne kadar iş yapılmıştır?



Şekil 3

q=5μC

q_o = 3μC



$$V = k\frac{q}{r}$$

$$V_a = k\frac{q}{r_1} - k\frac{q}{r_2}$$

$$V_a = 9.10^9\left(\frac{5.10^{-6}}{0,8} - \frac{5.10^{-6}}{0,4}\right)$$

$$V_a = -56250 \text{ (v)}$$

$$V_b = k\frac{q}{r_3} - k\frac{q}{r_4}$$

$$V_b = 9.10^9\left(\frac{5.10^{-6}}{0,2} - \frac{5.10^{-6}}{0,6}\right)$$

$$V_b = 150000 \text{ (v)}$$

$$W_{a\to b} = \Delta U = q_o\,\Delta V = q_o\,(V_b - V_a)$$

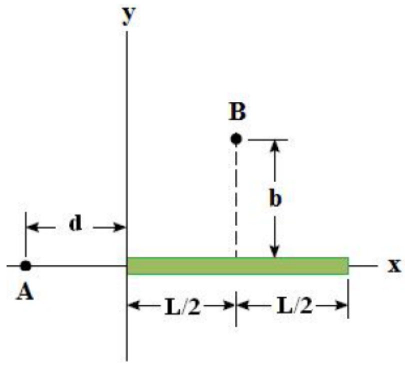
$$W_{a\to b} = 3.10^{-6}\left[150000 - (-56250)\right]$$

$$W_{a\to b} \cong 0,62 \text{ (J)}$$

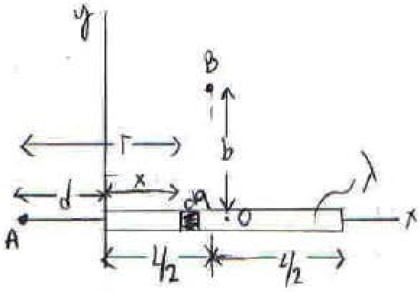
4. Şekil 4'te görüldüğü gibi x ekseni boyunca uzanmış olan L uzunluklu çubuk üzerinde düzgün λ yük yoğunluğu bulunmaktadır.

a) A ve B noktalarındaki elektriksel potansiyeli hesaplayınız.

b) Çubuk düzgün olmayan $\lambda = \alpha x$ (α: sabit) yük yoğunluğuna sahip olursa A ve B noktalarındaki elektrik potansiyeli hesaplayınız.



Şekil 4



(a) A ve B noktalarındaki elektriksel potansiyeller;

$$V = k\int \frac{dq}{r} \quad \text{ile;}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$V_A = k\int_0^L \frac{dq}{r} = k\int_0^L \frac{\lambda dx}{r} \qquad \boxed{r = d + x}$$

$$V_A = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{x+d} \qquad \left[\text{integral tablosu: } \int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)\right]$$

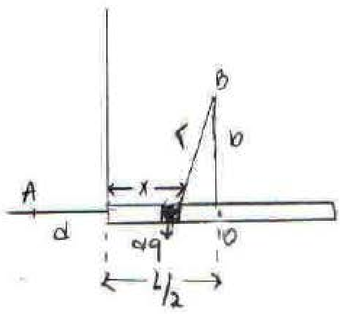
$$V_A = k\lambda \left(\ln(x+d)\Big|_0^L\right)$$

$$V_A = k\lambda \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right)$$

$$V = k\int \frac{dq}{r} \qquad r = \sqrt{b^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}$$

$$V_B = \int \frac{k\lambda\, dx}{\left(b^2 + (L/2 - x)^2\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{L}{2} - x \\ du &= -dx \end{aligned}}$$



$$V_B = k\lambda \int \frac{-du}{\sqrt{b^2 + u^2}} \qquad \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad \text{veya } \sinh^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$V_B = -k\lambda \left(\ln(u + \sqrt{u^2+b^2}) \right)$$

$$V_B = -k\lambda \left(\ln\left(\frac{L}{2} - x\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 + b^2} \right) \Big|_0^L$$

$$V_B = -k\lambda \left[\ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}\right)^2 + b^2}\right) - \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b^2}\right) \right]$$

$$V_B = k\lambda \left[\ln\left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{L^2/4 + b^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}} \right) \right]$$

b) $\lambda = \alpha x$ ise A ve B noktalarındaki potansiyel farkları;

$$V_A = \int k \frac{dq}{r} = k \int \frac{\lambda dx}{r} = k\alpha \int_0^L \frac{x\,dx}{(x+d)}$$

, $\left[\text{integral tablosundan;} \quad \int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) \right]$

$$V_A = k\alpha \left(x - d.\ln(x+d) \right) \Big|_0^L$$

$$V_A = k\alpha \left(L - d.\ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \right)$$

B noktasında, $V_B = \int k \frac{dq}{r} = k\alpha \int \frac{x\,dx}{\sqrt{b^2 + (L/2 - x)^2}}$ $\left[\begin{array}{l} u = L/2 - x \\ du = -dx \end{array} \right]$

$$V_B = k\alpha \int \frac{(L/2 - u)(-du)}{\sqrt{b^2+u^2}}$$

$$V_B = k\alpha \left[\int \frac{-L/2\,du}{\sqrt{b^2+u^2}} + \int \frac{u\,du}{\sqrt{b^2+u^2}} \right]$$

$\left[\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x^2 + a^2 \right]$

$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) \right]$

$$V_B = -k\alpha \left[-\frac{L}{2} \left(\ln(u + \sqrt{u^2+b^2}) \Big|_0^L + (u^2+b^2) \Big|_0^L \right) \right]$$

$u = L/2 - x$ yazılırsa;

$$V_B = k\frac{\alpha L}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{L^2/4 + b^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4+b^2} - L/2} \right)$$

5. **(a)** Bir elektron, bir elektrik alan tarafından A levhasından B levhasına doğru hızlandırıldığında $5{,}25\text{x}10^{-15}$ J enerji kazanıyor. Levhalar arasındaki potansiyel fark nedir ve hangi levha daha yüksek potansiyeldedir?

(b) Bir bölgedeki elektrik alan $\vec{E} = 5x^2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad kV/m$'dir. A noktası orijinde bulunuyor ise ve B noktası (4,3,0) m ise V_A-V_B potansiyel farkını bulunuz.

(a) $W = \Delta K = q|\Delta V|$

$5{,}25.10^{-15} = 1{,}6.10^{-19}|\Delta V|$

$|\Delta V| = 32{,}8.10^{3}\,V$

Elektrik alan, yüksek potansiyele sahip plakadan düşük potansiyele sahip plakaya doğru oluşur. Elektron ise elektrik alana ters yönde hareket eder. Bu bilgiler ışığında B plakası daha yüksek potansiyele sahiptir!

(b) $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$ A(0,0,0) $\rightarrow$ B(4,3,0)

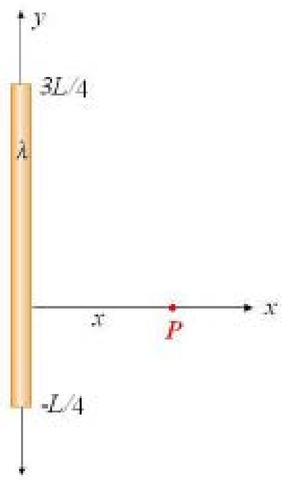
$V_B - V_A = -\int_A^B E_x\,dx + \int_A^B E_y\,dy - \int_A^B E_z\,dz$

$V_B - V_A = -\int_0^4 5x^2\,dx + \int_0^3 3\,dy - \cancel{\int_0^0 2\,dz}^{\,0}$

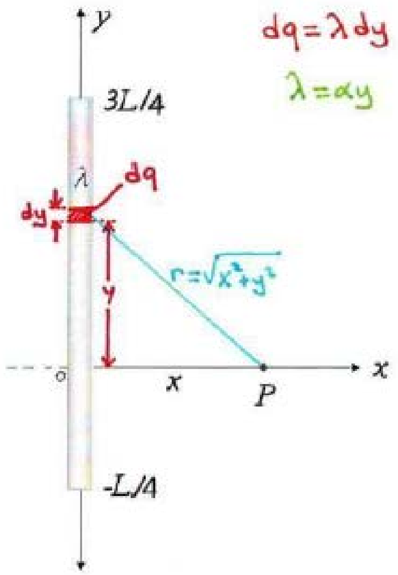
$V_B - V_A = -\frac{5x^3}{3}\Big|_0^4 + 3y\Big|_0^3$

$V_B - V_A = -97{,}6\,kV$

6. Şekil 5'de görüldüğü gibi, uzunluğu **L** ve toplam yükü **Q** olan bir çubuk $\lambda = \alpha y$ (α: sabit) yük yoğunluğuna sahiptir.
a) **x** ekseni üzerindeki **P** noktasında elektriksel potansiyeli bulunuz.
b) **P** noktasındaki elektrik alanın **x** bileşenini, (a) şıkkında bulduğunuz potansiyeli kullanarak elde ediniz.
c) **P** noktasına bir **q** yükü konulursa, bu yüke etki eden elektriksel kuvvetin **x** bileşenini bulunuz.



Şekil 5



$dq = \lambda dy$

$\lambda = \alpha y$

$$V = k\int \frac{dq}{r}$$

a) $$V_P = k\int \frac{dq}{r} = k\int \frac{\lambda\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$V_P = k\int_{-L/4}^{3L/4} \frac{\alpha y\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x^2+y^2 = u$

$2y\,dy = du$

$y = -\frac{L}{4}\ ;\ u = x^2+\frac{L^2}{16}$

$y = \frac{3L}{4}\ ;\ u = x^2+\frac{9L^2}{16}$

$$V_P = \frac{k\alpha}{2}\int_{x^2+\frac{L^2}{16}}^{x^2+\frac{9L^2}{16}} \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$V_P = k\alpha\left[u^{1/2}\right]_{x^2+\frac{L^2}{16}}^{x^2+\frac{9L^2}{16}}$$

$$\boxed{V_P = k\alpha\left(\sqrt{x^2+\frac{9L^2}{16}} - \sqrt{x^2+\frac{L^2}{16}}\right)}$$

b)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \longrightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_x = -\frac{d}{dx}\left[k\alpha\left(\sqrt{x^2+\frac{9L^2}{16}} - \sqrt{x^2+\frac{L^2}{16}}\right)\right]$$

$$E_x = -k\alpha \left[\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{9L^2}{16}\right)^{-1/2} 2x - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{L^2}{16}\right)^{-1/2} 2x \right]$$

$$\boxed{E_x = k\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}}} \right)}$$

c) $\vec{F}_e = q\vec{E} = q\left(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}\right)$

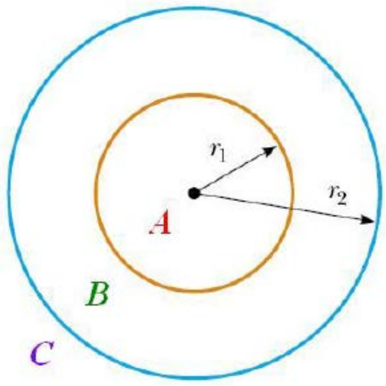
$F_{e_x} = qE_x$

$$\boxed{F_{e_x} = k\alpha q \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{16}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{9L^2}{16}}} \right)}$$

7. **Şekil 6**'daki iki ince iletken küresel kabuğu göz önüne alınız. İçteki iletken kabuğun yarıçapı $\mathbf{r_1=15cm}$ ve üzerindeki yük **10 nC**; dıştaki iletken kabuğun yarıçapı $\mathbf{r_2=30cm}$ ve yükü **−15 nC**'dir.

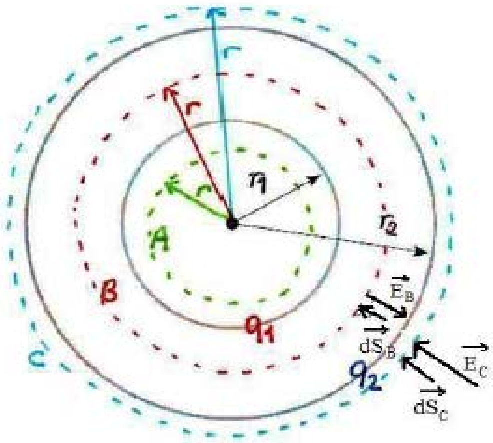
a) A, B ve C bölgelerinde elektrik alanın şiddetini,

b) A, B ve C bölgelerinde elektriksel potansiyel değerlerini bulunuz. ($r=\infty$ 'da V=0 alınız.)



Şekil 6

a) $\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \dfrac{q_{iç}}{\epsilon_0}$



A bölgesinde;

$q_{iç}=0$; $\boxed{E_A=0}$ $(r<r_1)$

B bölgesinde;

$$E_B.(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} = k\frac{q_1}{r^2}$$

$$E_B = 9.10^9 . \frac{10.10^{-9}}{r^2}$$

$$\boxed{E_B = \frac{90}{r^2}\ (V/m)} \quad (r_1<r<r_2)$$

C bölgesinde;

$$E_C.(4\pi r^2) = \frac{q_1+q_2}{\epsilon_0}$$

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2} = k\frac{q_1+q_2}{r^2} = 9.10^9 . \frac{(10-15).10^{-9}}{r^2}$$

$$\boxed{E_C = -\frac{45}{r^2}\ (V/m)} \quad (r>r_2)$$

b) $V_C = k\frac{(q_1+q_2)}{r}$; $V_C = 9.10^9 . \frac{(10-15).10^{-9}}{r}$; $\boxed{V_C = -\frac{45}{r}\ (V)}$

$V_B = V_{r_2} + \int_{r_2}^{r} k\frac{q_1}{r^2}dr$

$r \to r_2$ için $V_{r_2} = -\frac{45}{0,3} = -150\ (V)$

$V_B = -150 + kq_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$

$V_B = -150 + 9.10^9 . 10.10^{-9}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0,3}\right)$

$\boxed{V_B = -450 + \frac{90}{r}\ (V)}$

$r \to r_1$ için $V_{r_1} = -450 + \frac{90}{0,15} = +150\ (V)$

$\boxed{V_A = +150\ V}$

İKİNCİ YOL:

$$V_C - V_\infty = -\int_\infty^C \vec{E}_C.d\vec{S}_C$$

$[\,dS_C = -dr\,]$

$$V_C = -\int_\infty^C \vec{E}_C.d\vec{S}_C = -\int_\infty^C E_C dS_C Cos0 = -\int_\infty^r \frac{45}{r^2}(-dr) = +\int_\infty^r \frac{45}{r^2}dr = 45\left|-\frac{1}{r}\right|_\infty^r = -\frac{45}{r}(V)$$

r=r$_2$ için $V_{r2} = -\frac{45}{0,3} = -150(V)$

$[\,dS_B = -dr\,]$

$$V_B = -\int_\infty^{r2} \vec{E}_C.d\vec{S}_C - \int_{r2}^{B} \vec{E}_B d\vec{S}_B = -\int_\infty^{r2} E_C dS_C Cos0 - \int_{r2}^{B} E_B dS_B Cos180 = -\int_\infty^{r2} \frac{45}{r^2}(-dr) - \int_{r2}^{r} \frac{90}{r^2}(-dr)(-1) =$$

$$= +\int_\infty^{r2} \frac{45}{r^2}dr - \int_{r2}^{r} \frac{90}{r^2}dr = 45\left|-\frac{1}{r}\right|_\infty^{r2} - 90\left|-\frac{1}{r}\right|_{r2}^{r} = -\frac{45}{r_2} + 90\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{45}{0,3} + 90\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0,3}\right) = -450 + \frac{90}{r}(V)$$

r=r$_1$ için $V_{r1} = -450 + \frac{90}{0,15} = 150(V)$

$V_A = 150(V)$

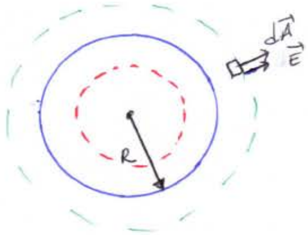
8. **R** yarıçaplı, **Q** yüklü yalıtkan bir küre yarıçapa bağlı değişimi $\rho = Ar^2$ olan düzgün olmayan bir yük yoğunluğuna sahiptir. Gauss kanununu kullanarak;

a) Küre dışında ve içinde elektriksel alanı bulunuz.

b) Küre içindeki bir noktada elektriksel potansiyeli hesaplayınız.

c) Elektrik alan ve elektriksel potansiyelin yarıçapa göre değişimini veren grafiği kabaca çiziniz.

$r > R$



a) $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$

$q_{iç} = Q = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^R A r^2 4\pi r^2 dr = A 4\pi \frac{R^5}{5}$

$E_{dış} 4\pi r^2 = 4\pi A \frac{R^5}{5\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{dış} = \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r^2}\hat{r}$

$r < R$

$q_{iç} = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^r A r^2 4\pi r^2 dr = A 4\pi \frac{r^5}{5}$

$E_{iç}\, 4\pi r^2 = 4\pi A \frac{r^5}{5\epsilon_0}$

$\vec{E}_{iç} = A \frac{r^3}{5\epsilon_0}\hat{r}$

b) $V_A - V_\infty = V_A = -\int_\infty^R \vec{E}_{dış} \cdot d\vec{s} - \int_R^r \vec{E}_{iç} \cdot d\vec{s}$ $\qquad ds = dr$

$V_A = -\int_\infty^R \frac{AR^5}{5\epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r A \frac{r^3}{5\epsilon_0} dr$

$V_A = \frac{AR^5}{5\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - 0\right) - \frac{A}{5\epsilon_0}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{R^4}{4}\right)$

$V_A = \frac{A}{20\epsilon_0}\left(5R^4 - r^4\right)$

c)